Fonctions exponentielles

1 Puissances non entières d'un nombre

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$

$2^{1,7}$?

1.1 Définition et propriétés

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$ et si n est un entier naturel, alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

On a également $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Rappelons les propriétés opératoires vues au collège (a et b désignent deux nombres réels et n désigne un entier relatif) :

$$a^{n+m} = a^n \times a^m \qquad a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m \times n} \qquad \text{et} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$2^0 = 2^{1-1} = \dfrac{2^1}{2^1} = \dfrac{2}{2} = 1$

On a aussi $a^1 = a$ et $a^0 = 1$

On peut aussi calculer les puissances non entières d'un nombre **positif**. En pratique, on le fait à la calculatrice.

$2^{1,7} = 2^{\frac{17}{10}} = \left(2^{17}\right)^{1/10} = \sqrt[10]{2^{17}}$

Exemples

- $2^{3,1} \simeq 10,556$ ($2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^{3,1}$ est entre les deux) ;
- $0,4^{2,3} \simeq 0,1215$.

Toutes les règles de calcul sur les puissances fonctionnent avec les puissances non entières.

Signification de certaines puissances non entières

- Si $a > 0$, $a^{1/2} = \sqrt{a}$. En effet, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a : $\sqrt{a}^2 = a$.
  Or $\left(a^{1/2}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^1 = a$.
  $a^{1/2}$ est bien le nombre positif dont le carré vaut a, c'est-à-dire $\sqrt{a}$.
- De même, $a^{1/3}$ est la racine cubique de a (la racine cubique de a est le nombre dont le cube vaut a ; par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$; etc.), pour les mêmes raisons :
  $\left(a^{1/3}\right)^3 = a^{\frac{1}{3} \times 3} = a^1 = a$.
- Plus généralement, $a^{1/n}$ est la racine n-ième de a.

$1,3^{10}$ $\qquad$ $0,7^{10}$

1.2 Application : taux d'évolution moyen

Rappel Lors d'une évolution de t %, le coefficient multiplicateur est de $1 + \frac{t}{100}$. C'est le nombre par lequel on multiplie la quantité initiale pour obtenir la quantité finale.

Exemple Pour une augmentation de 25 %, le coefficient multiplicateur vaut 1,25 car $1 + \frac{25}{100} = 1,25$.
Pour une baisse de 12 %, il vaut 0,88 car $1 - \frac{12}{100} = 1 - 0,12 = 0,88$.

Si on augmente 10 € de 25 %, on obtient $5 \times 1,25 = 6,25$ €.

Quand il y a **plusieurs taux d'évolution successifs**, on les multiplie entre eux pour connaître l'évolution globale.

---

1. On calcule $a^1 \times a^{-1}$ de deux manières différentes :
   - D'une part, $a^1 \times a^{-1} = a^{1-1} = a^0$;
   - D'autre part, $a^1 \times a^{-1} = a \times \frac{1}{a} = 1$.

   Ces deux nombres sont égaux.

Exemple Pour une hausse de 25 % suivie d'une baisse de 12 %, le coefficient multiplicateur global est

$$1{,}25 \times 0{,}88 = 1{,}1$$

ce qui correspond à une hausse de 10 % $\left(\text{car } 1{,}1 = 1 + \frac{10}{100}\right)$.

Quand il y a plusieurs évolutions successives, le **taux d'évolution moyen** est le taux d'évolution qui aurait été appliqué à chaque évolution **si toutes les évolutions avaient été les mêmes**.

Exemple On considère une hausse de 25 %, suivie d'une baisse de 12 %, suivie d'une baisse de 4 %, puis d'une hausse de 8 %.
Le coefficient multiplicateur global est alors de $\mathbf{1{,}25 \times 0{,}88 \times 0{,}96 \times 1{,}08 = 1{,}14048}$.

S'il y avait quatre évolutions identiques successives de t %, ça aurait fait

$$\left(1+\frac{t}{100}\right) \times \left(1+\frac{t}{100}\right) \times \left(1+\frac{t}{100}\right) \times \left(1+\frac{t}{100}\right) = 1{,}14048$$

soit $\left(1+\frac{t}{100}\right)^4 = 1{,}14048$.

On élève tout à la puissance $\dfrac{1}{4}$:

$$\left(\left(1+\frac{t}{100}\right)^4\right)^{1/4} = 1{,}14048^{1/4}$$

Or $\left(\left(1+\frac{t}{100}\right)^4\right)^{1/4} = \left(1+\frac{t}{100}\right)^{4\times\frac{1}{4}} = \left(1+\frac{t}{100}\right)^1 = 1+\frac{t}{100}$

Finalement $1+\frac{t}{100} = 1{,}14048^{1/4} \simeq 1{,}0334$ et on trouve t facilement : il s'agit d'une augmentation moyenne de 3,34 %.

Récapitulatif Pour n évolutions successives avec un taux d'évolution global T, le taux moyen T_m se calcule par

$$1+\frac{T_m}{100} = \left(1+\frac{T}{100}\right)^{1/n}$$

Fait (:)

2 Fonctions exponentielles

2.1 Définition

Soit $a > 0$. La fonction exponentielle de base a est la fonction f définie par $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Regardons l'évolution d'une fonction exponentielle de base a pour quelques valeurs de a.
La fonction exponentielle de base $a = 2$ est définie pour tout x par $f(x) = 2^x$, et

- $f(-3) = 2^{-3} = 0{,}125$;
- $f(-2) = 2^{-2} = 0{,}25$;
- $f(-1) = 2^{-1} = 0{,}5$;
- $f(0) = 2^0 = 1$;
- $f(1) = 2^1 = 2$;
- $f(2) = 2^2 = 4$;
- $f(3) = 2^3 = 8$;
- $f(4) = 2^4 = 16$;

$a^{-n} \times a^n = a^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

La fonction exponentielle de base 2 est une fonction **croissante** (avec une croissante très rapide : on a par exemple $2^{16} = 65536$).

$0{,}5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{\frac{1}{16}} = 16$

La fonction exponentielle de base $a = 0{,}5$ est définie pour tout x par $g(x) = 0{,}5^x$, et

- $g(-4) = 0{,}5^{-4} = 16$;
- $g(-3) = 0{,}5^{-3} = 8$;
- $g(-2) = 0{,}5^{-2} = 4$;
- $g(-1) = 0{,}5^{-1} = 2$;
- $g(0) = 0{,}5^{0} = 1$;
- $g(1) = 0{,}5^{1} = 0{,}5$;
- $g(2) = 0{,}5^{2} = 0{,}25$;
- $g(3) = 0{,}5^{3} = 0{,}125$;

La fonction exponentielle de base 0,5 est **décroissante**.

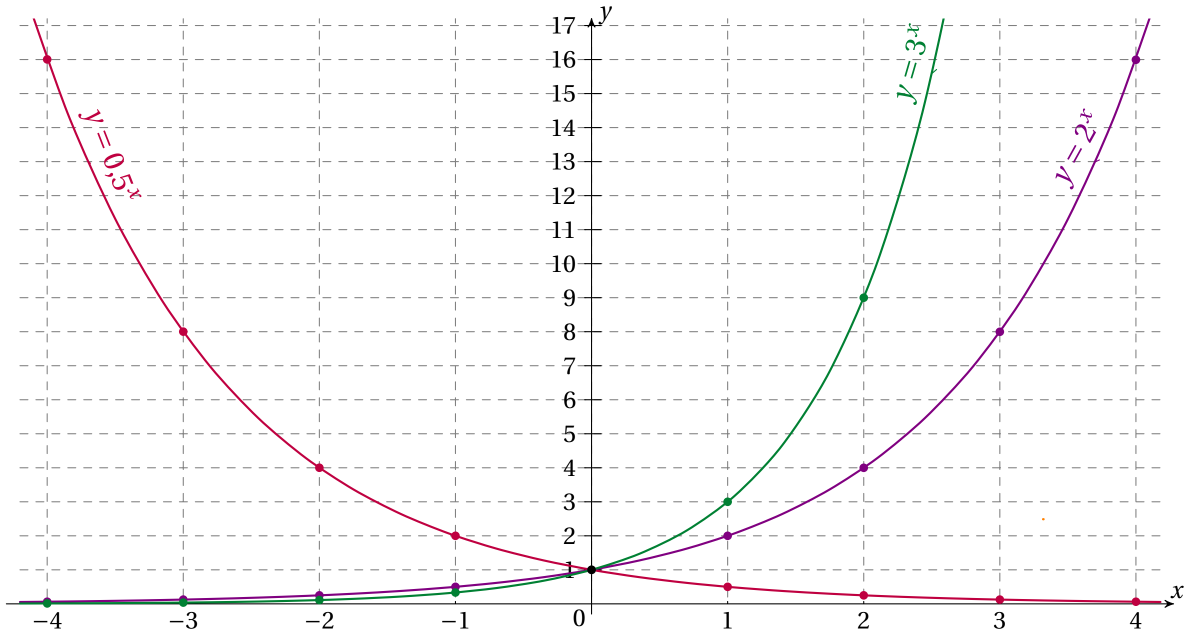
2.2 Propriétés et courbe représentative

Propriétés Si $a > 1$, alors $f(x) = a^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
Si $0 < a < 1$, alors $f(x) = a^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
On a toujours $f(0) = 1$ et $f(1) = a$.

Reprenons les exemples du paragraphe précédent. On peut faire un tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$g(x) = 0{,}5^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

et tracer la courbe représentative.



(on a également tracé la courbe représentative de la fonction $h(x) = 3^x$ à titre comparatif).

Propriétés Les courbes représentatives des fonctions $f(x) = a^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Si $a > 1$ et pour $x > 0$, plus a est grand, plus la courbe représentative de la fonction exponentielle de base a croît rapidement.

À l'inverse, si $0 < a < 1$ et pour $x < 0$, plus a est proche de 0, plus la courbe représentative de la fonction exponentielle de base a décroît rapidement.

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \ldots$$

$$2^3 \times 2^5 = 2^8 \qquad \frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

$$(2^3)^5 = 2^{15} \qquad (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$$